Reimund Albers, Arithmetik als Prozess, WiSe 05/06

Klausur, Lösungen

1. a) A B C $((A \Rightarrow B) \text{ und } (B \Rightarrow C)) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$

A	B	C	$A \Rightarrow B$	und	$B \Rightarrow C$	$\Rightarrow$	$A \Rightarrow C$	
w	w	w	w	w	w	w	w	
w	w	f	w	f	f	w	f	
w	f	w	f	f	w	w	w	$\Leftarrow$
w	f	f	f	f	w	w	f	
f	w	w	w	w	w	w	w	
f	w	f	w	f	f	w	w	$\Leftarrow$
f	f	w	w	w	w	w	w	
f	f	f	w	w	w	w	w	
			1.	3.	2.	5	4.	

je Spalte 1

Die Aussage ist wahr, da in der 5. Spalte sich

6 stets „wahr" ergibt 1

b) In den beiden mit „$\Leftarrow$" markierten Zeilen 1
steht in der 4. Spalte „w", während in der 3. Spalte ein „f" steht. Für eine Äquivalenz

2 müssten beide Wahrheitswerte gleich sein. 1

c) Kontraposition: nicht $(a \mid b \cdot c) \Rightarrow$ nicht $(a \mid b$ oder $a \mid c)$ 1

2 Auflösen d. Klammern $a \nmid b \cdot c \Rightarrow a \nmid b$ und $a \nmid c$ 1

2. a) Da $10!$ die Primfaktoren 2, 3, 5 und 7 enthält,
muss man andere wählen, z.B. $a = 11^5 = 161.051$
oder $a = 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 67 = 162.877$ Zahl 1
Da die PFZ von a und $10!$ verschiedene Primzahlen enthält, kann der $ggT(a, 10!)$ nur 1

2 sein. Begründ 1

b) $3\,628\,800 = 1 \cdot 3627029 + 1771$

$3627029 = 2048 \cdot 1771 + 21$ 2

$1771 = 84 \cdot 21 + \boxed{7}$ je Fehler (−1)

$21 = 3 \cdot 7 + 0$

3 also ist $ggT(10!, 3627029) = 7$ 1

c) $10! = 2^8 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7^1$

Jeder Teiler ist eine Auswahl aus diesen

$\boxed{2}$ Primteilern. $\Rightarrow$ Anz der Teiler $= 9 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2 = 270$

3. a) Für P 9 Möglichk., für A 10 Möglichk

$\boxed{2}$ $\Rightarrow$ Es gibt $9 \cdot 10 = 90$ PAPPA-Zahlen 2

b) Permutationen von 47447

$$\frac{5!}{3! \cdot 2!} = \frac{5 \cdot 4}{2} = 10 \text{ Permut.} \quad 1$$

$\boxed{2}$ (allgemeine Permutationsformel) 1

c) Es gibt dann $10 \cdot 10 = 100$ PAPPA-Zahlen 1

Davon sind 10 „Schnapszahlen", $(P = A)$

und 90 mit $P \neq A$ 1

Für $P = A$ gibt es keine Permutationen

außer der Zahl selbst. 1

Für $P \neq A$ gibt es zu jeder PAPPA-Zahl

$\boxed{5}$ 10 Permutationen 1

$\Rightarrow$ Alle Möglichkeiten sind $10 \cdot 1 + 90 \cdot 10 = 910$ 1

d) Es gibt insgesamt 100000 fünfstellige Zahlen

von 00000 bis 99999. Dann wäre also jede

Zahl eine Permutation einer PAPPA-Zahl,

$\boxed{2}$ was offensichtlich Unsinn ist.

Erläuterung 2

4a) $1 \equiv 1 \mod 37 \quad \Rightarrow \quad g_0 = 1$

$10 \equiv 10 \mod 37 \quad \Rightarrow \quad g_1 = 10$

$100 \equiv 26 \equiv -11 \mod 37 \quad \Rightarrow \quad g_2 = -11$ 1

$1000 \equiv 1 \mod 37 \quad \Rightarrow \quad g_3 = 1$ 1

Damit hat man eine Periode durchlaufen, die weiteren Gewichte setzen sich periodisch fort

$g_4 = 10 \quad g_5 = -11 \quad g_6 = 1 \quad \ldots$ 1

Test mit $\begin{array}{ccccccc} 1 & 8 & 7 & 4 & 1 & 6 & 1 \\ 1 & -11 & 10 & 1 & -11 & 10 & 1 \end{array} \rightarrow$ gew QS $= 1 - 88 + 70 + 4 - 11 + 60 + 1$

$= 37$

$\boxed{4}$

Damit ist gezeigt, dass 1874161 durch 37 teilbar ist. 1

b) $\left.\begin{array}{ccccc} P & A & P & P & A \\ 10 & 1 & -11 & 10 & 1 \end{array}\right\}$ gew. QS $= 10P + A - 11P + 10P + A$

$= 9P + 2A$ 1

Diese gew. QS muss durch 37 teilbar sein,

also $9P + 2A = k \cdot 37$, $k \in \mathbb{Z}$ 1

$k = 0 \Rightarrow$ PAPPA $= 00000$ ~~(weglassen)~~ 1

$k = 1 \quad 9P + 2A = 37$ wegen $P, A \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$

gibt es nur $P = 3$ und $A = 5$ als Lösung

PAPPA $= 35335$ 1

$k = 2 \quad 9P + 2A = 74$ ~~keine Lösung für~~ wegen $P, A \in \{0, 1, \ldots, 9\}$

gibt es nur $P = 8$ und $A = 1$ als Lösung

PAPPA $= 81881$ 1

$k \geq 3 \quad 9P + 2A \geq 111$ Für $P, A \in \{0, 1, \ldots 9\}$ gibt es keine Lösung, denn $9P + 2A$ ist maximal

$9 \cdot 9 + 2 \cdot 9 = 99$ 1

$\boxed{6}$

35335 und 81881 (und 00000) sind die durch 37 teilbaren PAPPA-Zahlen.

5 a) Nach den Teilbarkeitsregeln für allgemeine Basissysteme ist 13113_b durch $b-1$ teilbar, wenn die Quersumme durch $b-1$ teilbar ist. $QS(13113) = 9$ 1

Teiler von 9 sind 9, 3, 1

$b-1 = 9 \rightarrow$ Aufgabentext

$b-1 = 3 \Rightarrow b = 4 \rightarrow 13113_4$ ist durch 3 teilbar 1

$b-1 = 1 \Rightarrow b = 2$ Für $b = 2$ ist 13113 keine sinnvolle Zahl. 1

3

Also: $b = 10$ und $b = 4$ sind die einzigen Lösungen

b) 13113_b ist durch $b+1$ teilbar, wenn die altern. QS durch $b+1$ teilbar ist. 1

Die altern. QS ist $1-3+1-1+3 = 1$ 1

Also muss $b+1$ ein Teiler von 1 sein

$\Rightarrow b+1 = 1 \Rightarrow b = 0$ 1

Für ein Basissystem muss $b \geq 2$ sein.

4

Folglich gibt es keine Lösung 1

c) Wie in b) berechne ich die altern. QS

$P - A + P - P + A = P$. 1 Also muss $b+1$ 1 ein Teiler von P sein. Also $P = k \cdot (b+1)$, $k \in \mathbb{N}$

Damit ist P aber größer als b und keine gültige Ziffer.

3

Also gibt es keine Lösung 1

Vollständige Induktion

Die zu beweisende Aussage A(n):

$$\sum_{k=1}^{n} k(k+3) = \frac{1}{3} n(n+1)(n+5)$$

Beweis durch vollständige Induktion über n :

Induktionsanfang A(1): Die Aussage gilt für $n=1$

denn: $$\sum_{k=1}^{1} k(k+3) = 1 \cdot 4 = 4 \qquad \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 6 = \frac{1}{3} \cdot 12 = 4 \quad ✓ \quad 1$$

Induktionsschluss

Induktionsvoraussetzung A(n) :

$$\sum_{k=1}^{n} k(k+3) = \frac{1}{3} n(n+1)(n+5)$$

Induktionsbehauptung A(n +1) :

$$\sum_{k=1}^{n+1} k(k+3) = \frac{1}{3}(n+1)(n+2)(n+6) \qquad 1$$

Induktionsbeweis:

$$\sum_{k=1}^{n+1} k(k+3) = \sum_{k=1}^{n} k(k+3) + (n+1)(n+4) \qquad 1$$

Ind. Vor.

$$= \frac{1}{3} n(n+1)(n+5) + (n+1)(n+4) \qquad 1$$

$$= \frac{1}{3}(n+1) \cdot \left[n(n+5) + 3 \cdot (n+4) \right]$$

$$= \frac{1}{3}(n+1) \cdot \left[n^2 + 5n + 3n + 12 \right]$$

$$= \frac{1}{3}(n+1) \cdot \left[n^2 + 8n + 12 \right]$$

Umform.

$$= \frac{1}{3}(n+1)(n+2)(n+6)$$

4

8

Q.E.D.

Durch den Induktionsanfang und den Induktionsschluss von n auf n +1 ist die Aussage A für alle $n \in \mathbb{N}$ bewiesen.